

**Concursul Vranceanu – Procopiu,
Bacău, 26 noiembrie 2016**

Clasa a X-a, Matematică

Problema 1

Se consideră mulțimea M de numere reale care are cel puțin două elemente și care are proprietatea: pentru orice două elemente diferite a, b ale sale, numărul $a^2 + b\sqrt{2}$ este rațional.

a) Arătați că este posibil ca mulțimea să conțină un element x astfel încât $x\sqrt{2}$ să fie irațional.

b) Arătați că dacă mulțimea are cel puțin trei elemente, atunci, pentru orice $a \in M$, $a\sqrt{2}$ este număr rațional.

Soluție.

Oficiu **1p**

a) $M = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right\}$ **3p**

b) Fie $a \in M$ ales arbitrar și $b, c \in M \setminus \{a\}$, $b \neq c$.

Cum $(b^2 + a\sqrt{2}) - (b^2 + c\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$, rezultă $a\sqrt{2} - c\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ **2p**

La fel, $(a^2 + b\sqrt{2}) - (c^2 + b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$, deci $a^2 - c^2 \in \mathbb{Q}$, de unde rezultă $(a\sqrt{2} - c\sqrt{2})(a\sqrt{2} + c\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$, deci $a\sqrt{2} + c\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ **3p**

Ca atare, $(a\sqrt{2} - c\sqrt{2}) + (a\sqrt{2} + c\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$, de unde $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ **1p**

Problema 2

Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $\min(f, g)$ este injectivă, iar $\max(f, g)$ este surjectivă. Arătați că $f = g$.

Soluție.

Oficiu **1p**

Notând $u = \min(f, g)$ și $v = \max(f, g)$, avem $u(n) \leq v(n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ **1p**

Deoarece v este surjectivă, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $v(n_0) = 0$; atunci $u(n_0) \leq 0$, adică $u(n_0) = 0$. În plus, presupunând că există $m \neq n_0$ astfel încât $v(m) = v(n_0) = 0$, ar rezulta $u(m) = 0 = u(n_0)$, contradicție cu injectivitatea lui u **2p**

Fie $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $v(n_1) = 1$; atunci $u(n_1) \leq 1$, adică $u(n_1) \in \{0, 1\}$. Din injectivitatea lui u , obținem $u(n_1) = 1$. La fel ca mai sus, presupunând că există $m \neq n_1$ astfel încât $v(m) = v(n_1) = 1$, ar rezulta $u(m) = 1 = u(n_1)$, contradicție **2p**

Prin inducție matematică se demonstrează că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este unic un număr $n_k \in \mathbb{N}$ astfel încât $v(n_k) = u(n_k) = k$, deci u și v sunt bijective **3p**

Întrucât $n_k = u^{-1}(k) = v^{-1}(k)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, rezultă $u^{-1} = v^{-1}$, deci $u = v$, adică $\min(f, g) = \max(f, g)$, de unde $f = g$ **1p**